CUADERNILLO 6

EJEMPLAR DE CORTESÍA
NO APTO PARA LA VENTA

Nueva carpeta de Matemática III

Ruth Schaposchnik (coord.)
Luis Garaventa - Nora Legorburu
Patricia Rodas - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

6. Trigonometría 3
Revisión inicial 4
Las razones trigonométricas 5
Las razones trigonométricas en la calculadora ... 6
Resolución de triángulos rectángulos 7
Relaciones entre las razones trigonométricas 12
En el mundo real 13
Las razones trigonométricas y el relieve terrestre 13
Las razones trigonométricas y la construcción de viviendas 14
Más actividades 15
Autoevaluación 16

7. Vectores y movimientos 17
Revisión inicial 18
Vectores 19
Suma de vectores 20
Multiplicación de un vector por un número real 21
Traslaciones 22
Composición de traslaciones 23
Simetría respecto de un eje 24
Simetría respecto de un punto 25
Rotaciones 26
En el mundo real 27
Arte y movimientos 27
Mosaicos y recubrimientos 28
Más actividades 29
Autoevaluación 30

AIQUE

Este CUADERNILLO 6 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática III.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Diego F. Barros

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu
Valeria Machiunas

COPIEDICIÓN
Claudia García

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Silvana López

ILUSTRACIONES
Alejandra Lunik
Diego Molina
Diego Stigliano

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupi en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0060-2
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática III / Nora Legorburu...[et.al.]. ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
200 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0060-2

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, coord.

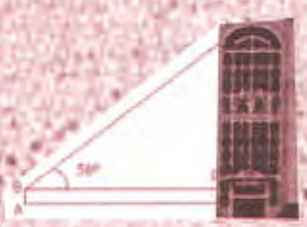
Esta edición se terminó de imprimir en Noviembre de 2008 en Latingráfica, Rocamora 4161, Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

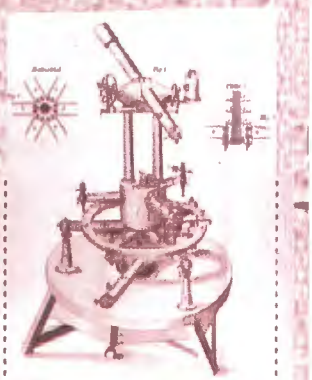
6 TRIGONOMETRÍA

Desde los albores de la humanidad, existió la necesidad de levantar grandes edificaciones, como templos, puentes, etcétera, para cuya construcción se requería conocer ciertas relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. En esos casos, la *trigonometría* resultó ser una herramienta muy importante .

b

a





Fernando, que es un ingeniero especialista en caminos, debe calcular la altura de una loma en un día nublado, y cuenta con un teodolito, que es un instrumento para medir ángulos, y una cinta métrica.

- ¿Qué clase de triángulo se forma entre el telescopio del teodolito, el pie de la loma y su parte más alta?
- ¿Qué otras medidas puede tomar Fernando para calcular la altura de la loma?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 El perímetro de un triángulo equilátero es de 24 cm; hallen su superficie.

.....

.....

2 En un trapecio isósceles, las bases mayor y menor miden 15 cm y 9 cm, respectivamente. Si saben que su altura es de 4 cm, encuentren el perímetro y la superficie del trapecio.

.....

.....

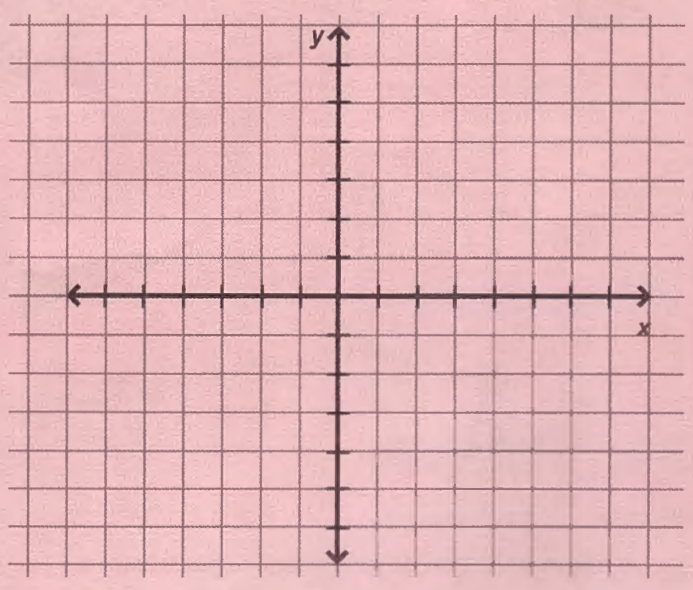
3 Una vara de 125 cm proyecta una sombra de 1 m. ¿Qué altura tendrá un árbol que, a la misma hora, proyecta una sombra de 12 m?

.....

.....

4 Ubiquen los puntos en el plano cartesiano y calculen el perímetro del polígono ABCDE. (Tengan en cuenta que los cuadraditos de la cuadrícula son de 0,5 cm de lado).

A = (−2; 6) B = (4; 2) C = (2; 0) D = (−3; 0) E = (−6; 4)



.....

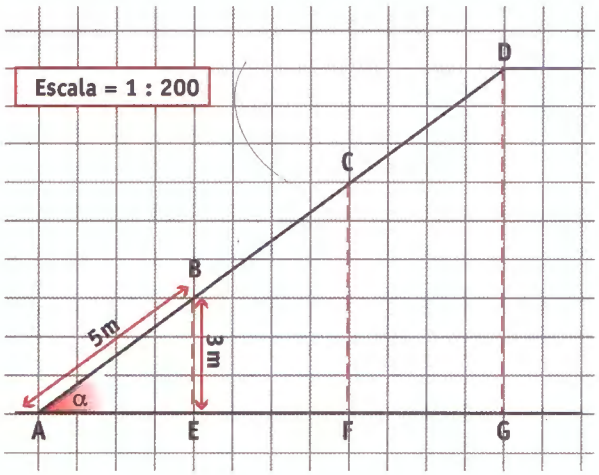
.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las razones trigonométricas

5 Un estacionamiento, ubicado en un primer piso, tiene una rampa de acceso que forma un ángulo α con la horizontal, como se ve en la figura. Cada 5 m que recorre un automóvil por la rampa, la altura alcanzada aumenta 3 metros.



a) Completen la siguiente frase.

Si un automóvil recorre 7,5 m, la altura alcanzada es ....., y si recorre 10 m, la altura es .....

b) Calculen las razones indicadas y enuncien una conclusión.

$\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}}$ = ... $\frac{\overline{CF}}{\overline{AC}}$ = ... $\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ = ...

Conclusión: .....

.....

.....

Para leer y recordar

- La razón entre el cateto opuesto a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo y la hipotenusa se llama *seno de* $\hat{\alpha}$ y es un valor constante que no depende de los lados del triángulo, sino de la amplitud de $\hat{\alpha}$.

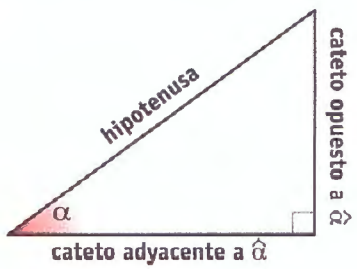
Con estas mismas características, podemos calcular la razón entre el cateto adyacente a $\hat{\alpha}$ y la hipotenusa, que recibe el nombre de *coseno de* $\hat{\alpha}$, y la razón entre el cateto opuesto y el adyacente, que es la *tangente de* $\hat{\alpha}$.

- Se llaman *razones trigonométricas* del ángulo agudo α de un triángulo rectángulo a los siguientes cocientes:

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}$$



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Razones trigonométricas en la calculadora

Para observar

- Para obtener las razones trigonométricas de un ángulo, con algunas calculadoras científicas, debemos proceder así:
  - Colocamos la calculadora en el modo DEG.
  - Para encontrar el coseno de 35° 25′, tecleamos:
    [3] [5] [°′″] [2] [5] [°′″] [cos] y en el visor aparece: [0.8149592552], entonces *cos* 35° 25′ = 0,8149592552.
  - De igual modo, podemos obtener el seno o la tangente, con las teclas [sin] y [tan], respectivamente.
- Para hallar un ángulo agudo, conociendo una de sus razones trigonométricas, podemos proceder así:
  - Colocamos la calculadora en modo DEG.
  - Para encontrar el ángulo α sabiendo que: *sen* $\hat{\alpha}$ = 0,1254, pulsamos: [0] [·] [1] [2] [5] [4] [SHIFT] [sin] y aparecerá [7.203855856]; luego pulsamos [SHIFT] [°′″] y leeremos en el visor: [7° 12° 13.88]; entonces $\hat{\alpha}$ = 7° 12′ 13,88″.
  - De igual manera, podemos hallar el ángulo, conociendo el coseno o la tangente, si pulsamos [SHIFT] [cos] y [SHIFT] [tan], respectivamente.
- En todos los casos es conveniente operar conservando en la calculadora todas las cifras decimales de los resultados parciales.

6 Utilicen la calculadora y unan con flechas según corresponda.

sen 28° 18′	0,3767632
cos 67° 52′	0,5
tg 45°	0,8931214
sen 30°	0,4740882
cos 60°	1

7 Hallen $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$.

sen $\hat{\alpha}$ = 0,2316 $\quad$ $\hat{\alpha}$ = ...

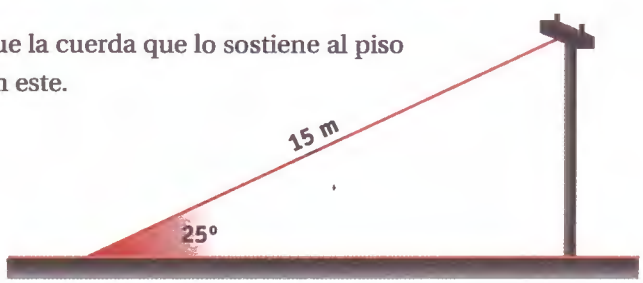
cos $\hat{\beta}$ = 0,3420 $\quad$ $\hat{\beta}$ = ...

tg $\hat{\delta}$ = 1,6 $\quad$ $\hat{\delta}$ = ...

8 Hallen la altura de un poste si saben que la cuerda que lo sostiene al piso mide 15 m y que forma un ángulo de 25° con este.

.....

.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Resolución de triángulos rectángulos

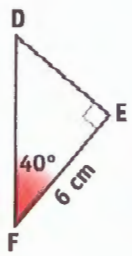
9 Se desea reemplazar parte de la escalera de entrada de una escuela por una rampa. La altura de la escalera es de 0,60 m. Si el ángulo de inclinación de la rampa es de 7°, ¿a qué distancia de la entrada debe comenzar?

.....

.....

10 Para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos, hallen el valor de los lados y los ángulos desconocidos.

a)

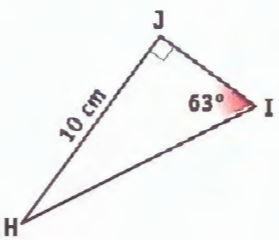


.....

.....

.....

b)

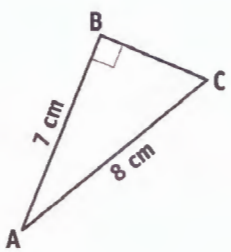


.....

.....

.....

c)



.....

.....

.....

d)

.....

.....

.....

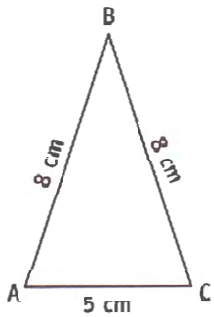
11 Se quiere trasladar una carga mediante una cinta transportadora, a una altura de 10 m. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación de la cinta si esta mide 30 m?

Para leer y recordar

Resolver un triángulo **es averiguar las medidas de los lados y los ángulos desconocidos. Para hacerlo, es útil aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

12 Hallen el área y las medidas de los ángulos interiores del siguiente triángulo isósceles.



.....

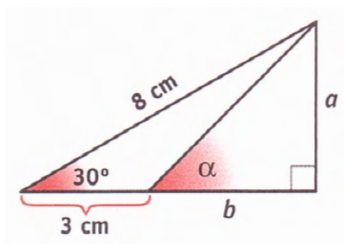
.....

.....

.....

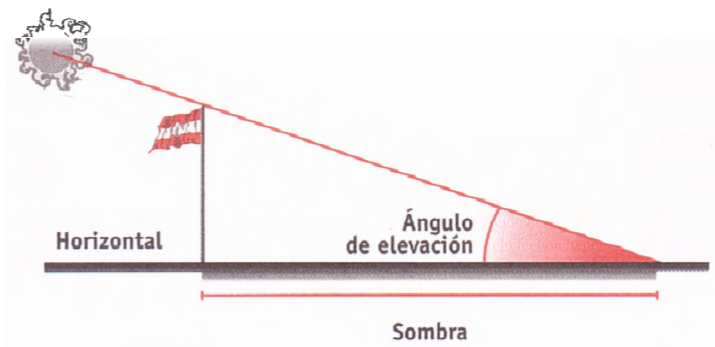
.....

13 Observen la figura y hallen las medidas de a, b y $\hat{\alpha}$.



14 Si la tangente de $\hat{\beta}$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$, hallen con la calculadora el seno y el coseno de $\hat{\beta}$.

15 Un mástil tiene 15 m de alto.



a) ¿Cuánto mide la sombra que proyecta el mástil cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57°?

.....

.....

b) ¿Qué distancia hay desde el extremo superior del mástil hasta el de su sombra?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

16 Existen camiones que poseen un sistema volcador que cuenta con un brazo movible que une la caja volcadora con el chasis. Mientras se realiza la operación de volcado, el brazo se extiende hasta alcanzar los 4 m de longitud, y su extremo superior se encuentra a una altura aproximada de 3,75 m con respecto al chasis. ¿Cuál es la amplitud aproximada del ángulo que forma el brazo con el chasis mientras se realiza el volcado?

.....

.....

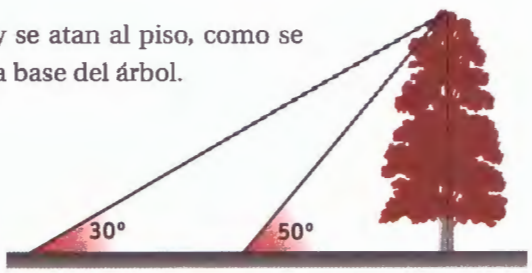
.....

17 Desde lo alto de un árbol se tensan dos cables y se atan al piso, como se muestra en la figura. El más alejado queda a 40 m de la base del árbol. Calculen:

a) La altura del árbol.

b) La longitud de ambos cables.

c) La distancia, a nivel del piso, entre ambos cables.



.....

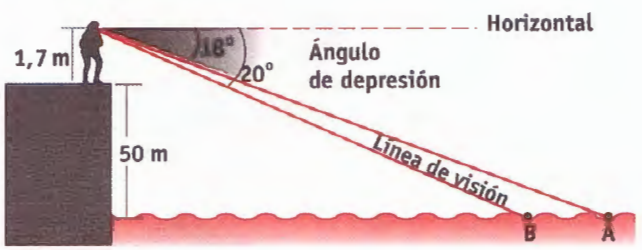
.....

.....

18 Una persona, de pie sobre un acantilado de 50 m de altura, observa dos boyas con ángulos de depresión de 18° y 20°, respectivamente. Observen el esquema y calculen:

a) La distancia entre las boyas.

b) La distancia entre la persona y la boya más cercana.



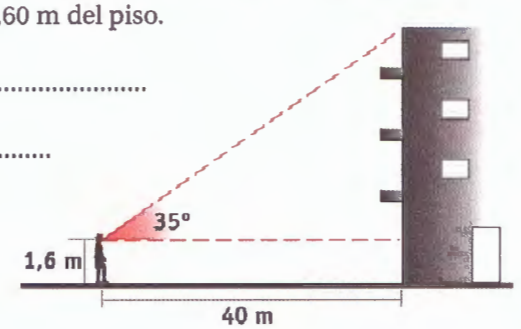
19 Para calcular la altura de un edificio, Carolina se ubica a una distancia de 40 m de este. La línea de la visual del punto más alto del edificio y la horizontal forman un ángulo de 35°. Calculen la altura del edificio si saben que los ojos de Carolina están a 1,60 m del piso.

.....

.....

.....

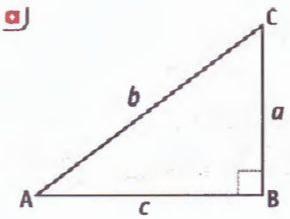
.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

20 Escriban las razones trigonométricas pedidas para los ángulos interiores de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

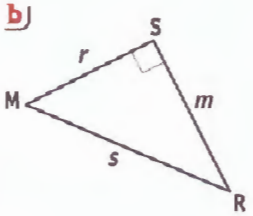
a)



$\text{sen } \hat{A} =$ ——

$\cos \hat{C} =$ ——

b)

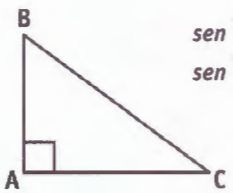


$\text{sen } \hat{R} =$ ——

$\cos \hat{M} =$ ——

Para leer y recordar

- **En todo triángulo rectángulo, el seno de uno de sus ángulos agudos es igual al coseno del otro.**



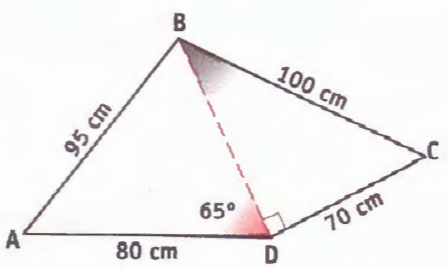
$\text{sen } \hat{C} = \cos \hat{B}$

$\text{sen } \hat{B} = \cos \hat{C}$

- **Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, podemos afirmar que *el seno de un ángulo agudo es igual al coseno de su complemento.***

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \cos (90° - \hat{\alpha}) \qquad \cos \hat{\alpha} = \text{sen } (90° - \hat{\alpha})$$

21 Calculen el área y los ángulos del siguiente cuadrilátero, teniendo en cuenta los datos de la figura.



.....

.....

.....

22 En cada caso, dibujen una figura de análisis y calculen lo pedido.

a) Hallen los ángulos interiores de un rombo cuyas diagonales miden 6 cm y 8 cm.

b) Hallen las medidas de los ángulos que forman al cortarse las diagonales de un rectángulo de 5 cm de base y 3 cm de altura.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

23 En algunas rutas, especialmente en las zonas montañosas o de serranía, aparecen señales como la de la figura. Esto quiere decir que por cada 100 m recorridos (en dirección horizontal) se ascienden 14 m.

a) Si se recorren 1000 m sobre el camino, ¿cuántos metros se ha ascendido?

.....

.....

b) ¿Cuál es la amplitud aproximada del ángulo que forma la ruta con la horizontal del lugar?

.....

.....

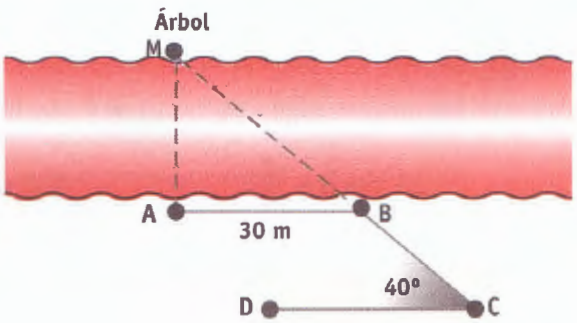
24 Los alumnos de 2.° fueron de campamento a orillas de un río con el profesor de Educación Física y el de Matemática.

Los profesores organizaron una competencia que consistía en estimar el ancho del río, valiéndose de una cinta métrica, un transportador de pizarrón, un ovillo de piolín y una calculadora científica. El grupo que indicó la medida con mayor precisión fue el de Luján y Danilo.

Los ganadores se llevaron el premio por haber procedido así:

Clavaron las estacas A, B, C y D y las unieron con un piolín, como muestra el esquema, de tal manera que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, y tomaron las medidas de la distancia AB y del ángulo BCD.

a) Hagan una estimación del ancho del río.



.....

.....

.....

b) Expliquen cómo pudieron haber pensado Luján y Danilo para realizar la construcción auxiliar que hicieron.

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Relaciones entre las razones trigonométricas

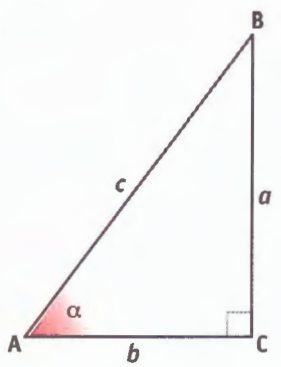
Para leer y recordar

A partir de las definiciones de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, pueden demostrarse las siguientes relaciones para todo ángulo agudo α.

$tg\ \hat{\alpha} = \frac{sen\ \hat{\alpha}}{cos\ \hat{\alpha}}$ $\qquad sen^2\ \hat{\alpha} + cos^2\ \hat{\alpha} = 1$

$sen\ (90° - \hat{\alpha}) = cos\ \hat{\alpha}$ $\qquad cos\ (90° - \hat{\alpha}) = sen\ \hat{\alpha}$ $\qquad tg\ (90° - \hat{\alpha}) = \frac{1}{tg\ \hat{\alpha}}$

25 Usen las definiciones de las razones trigonométricas y demuestren las propiedades enunciadas más arriba. Pueden plantear un caso general, como el triángulo que se muestra.



.....

.....

.....

.....

.....

26 Encuentren el valor exacto de las razones trigonométricas de $\hat{\alpha}$ que faltan, en cada caso.

5

a) $cos\ \hat{\alpha} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ b) $sen\ \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ c) $sen\ \hat{\alpha} = \frac{2}{3}$

....

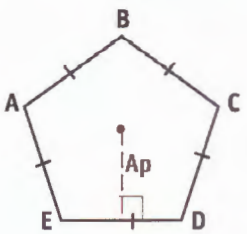
....

27 El perímetro de un pentágono regular es de 25 cm.

a) Hallen la medida de cada lado y de cada ángulo central.

.....

b) Encuentren la medida de la apotema.



.....

c) Calculen el área del pentágono.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las razones trigonométricas y el relieve terrestre

La *geodesia* es una ciencia que tiene por objeto determinar la forma y las dimensiones de la Tierra. Permite establecer la topografía de los terrenos, de los elementos naturales y artificiales, como embalses, puentes y rutas, que se representan mediante mapas. Las mediciones, en un estudio topográfico, son lineales y angulares, y se basan en principios de geometría y trigonometría. En la actualidad, se utilizan satélites artificiales para determinar la distribución irregular de masas sobre la Tierra.

28 Un grupo de topógrafos debe medir la altura de un acantilado sobre el que se encuentra un faro, como muestra el esquema, y para ello cuentan con un teodolito y una cinta métrica.
Al colocarse a una distancia de 25 m de la base, el ángulo de elevación de la base del faro es de 35°, mientras que el del punto más alto es de 42°.

a) ¿Cuál es la altura del acantilado?

.....

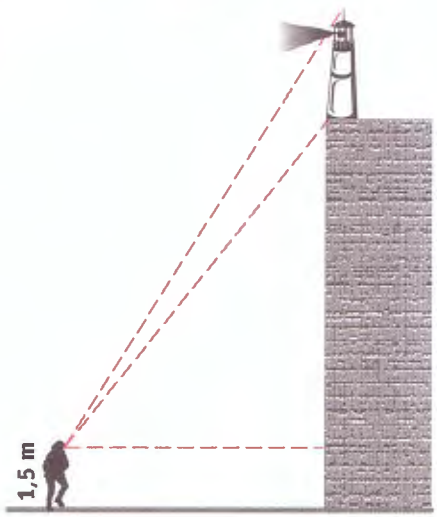
.....

b) ¿Cuál es la altura del faro?

.....

.....

c) ¿A qué distancia de la base, debería colocarse el teodolito para que el ángulo de elevación de la base del faro sea de 60°?



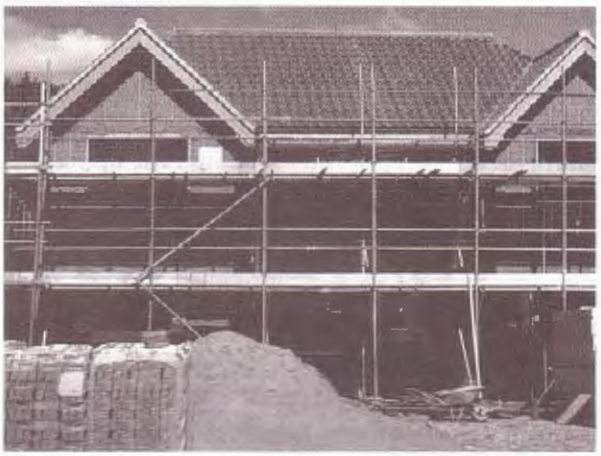
.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las razones trigonométricas y la construcción de viviendas



La precisión en los cálculos matemáticos y en las mediciones, y la selección de materiales son claves para la construcción de casas, edificios, puentes, etcétera.

Al construir una casa, se puede elegir entre distintos tipos de techos, por ejemplo: los techos de tejas (francesa o colonial), los de chapa, etcétera. La caída de estos debe responder a una determinada pendiente. Estas pendientes se expresan como porcentajes: la de 45° corresponde al 100%, ya que por cada unidad de longitud que se avanza en sentido horizontal, también se avanza una en sentido vertical. En el caso de los techos de tejas, la pendiente va de los 28° (aproximadamente 53%) a los 35° (aproximadamente 70%), y en los de chapa, es de alrededor de 6° (10,5%, aproximadamente). Estos valores son los que permiten que el techo resista la acción del viento y de la lluvia.

29 ¿Cuál de las razones trigonométricas se usa para la expresión porcentual de la pendiente?

.....

30 Juan es maestro mayor de obras y debe armar un techo de tejas sobre una casa de 8 m de frente por 6 m de fondo. La pared del frente, la más baja, que sostiene al techo, mide 2,5 m.

a) ¿Cuál será la altura de la pared opuesta si la inclinación debe ser del 60%?

.....

.....

b) Suponiendo que el techo no sobresale de ninguna de las cuatro paredes, ¿cuántos metros cuadrados de tejas deberían comprarse, aproximadamente?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

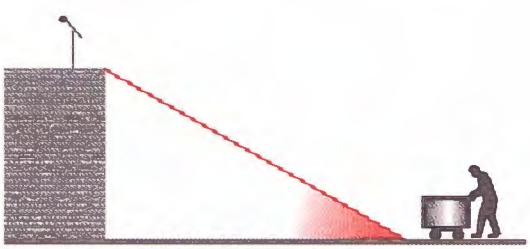
31 Los aviones, en general, al descender, deben hacerlo de modo tal que cada 100 m recorridos bajen 3 m. ¿Cuántos kilómetros antes del aeropuerto de aterrizaje debe iniciar el descenso un avión que se encuentra a 15 km de altura?

32 Después de haber resuelto varios ejercicios, Pablo, Ana y Juan comentan sus conclusiones. Uno de los tres está diciendo algo que no es cierto. Prueben con varios valores para averiguar quién es, y demuéstrenlo con un ejemplo.

El seno de un ángulo agudo es siempre menor que 1.
El coseno de un ángulo agudo es siempre menor que 1.
La tangente de un ángulo agudo es siempre menor que 1.
PABLO
ANA
JUAN

33 ¿Es cierto que el seno del doble de un ángulo es igual al doble del seno de dicho ángulo? Justifiquen su respuesta.

34 Se necesita construir una rampa para poder subir los equipos de música de una banda al escenario. Se sabe que el escenario se encuentra a una altura de 3 m y, para facilitar el ascenso, el ángulo que debe formar la rampa y el piso debería ser de 22°. Encuentren la longitud de la rampa.



35 Una persona asciende por un camino de montaña. Al llegar a un paraje, se encuentra a 820 m de altura, y luego de andar 2 km más, se encuentra a 1000 m.

a) Encuentren la pendiente del camino.

b) Indiquen cuál es el ángulo de inclinación aproximado del camino.

36 En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de sus ángulos agudos es 1.

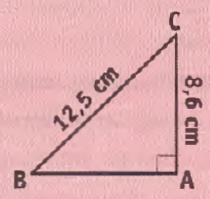
a) Clasifiquen al triángulo según sus lados.

b) Encuentren con la calculadora el valor aproximado del seno y del coseno del mismo ángulo.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

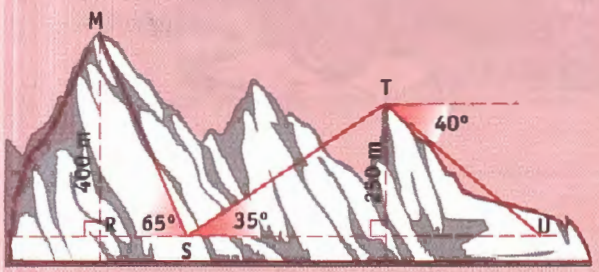
AUTOEVALUACIÓN

1 En el siguiente triángulo, averigüen el valor del lado y los ángulos desconocidos.



2 En el $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ cm, y $\overline{AC} = 6$ cm. Calculen su área y sus ángulos interiores.

3 Una empresa de energía eléctrica debe colocar una línea de tensión a través de un terreno montañoso. Un grupo de topógrafos diagramó el siguiente esquema.



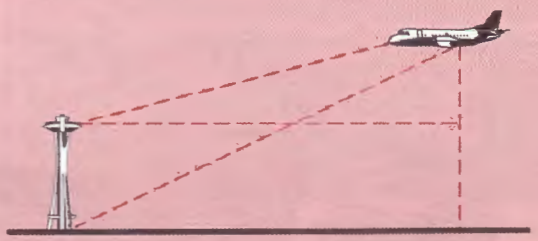
a) ¿Cuál es la distancia existente entre los puntos R y U?

b) ¿Cuánto dinero gastará la empresa en la compra de cable para la línea que va de M a U, si el metro lineal cuesta $2 y se calcula un 5% más de gasto por los cortes?

4 Encuentren el valor exacto del seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo, si el coseno de ese ángulo es igual a las dos terceras partes del seno del mismo ángulo.

5 Expliquen por qué, para todo ángulo agudo, se cumple que el seno del ángulo es igual al coseno del complemento del ángulo.

6 Un avión, que se encuentra a 1500 m de altura, se comunica con la torre de control para poder aterrizar. La altura de la torre es de 35 m y el ángulo de observación, desde su parte superior, es de 36° (ángulo formado por la visual y la horizontal). Calculen la distancia entre el avión y la base de la torre.

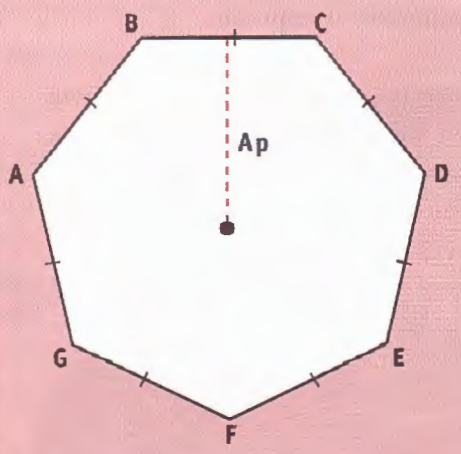


7 El perímetro de un heptágono regular es 42 cm.

a) Hallen la medida de cada lado y de cada ángulo interior.

b) Encuentren la medida de la apotema.

c) Calculen el área.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

7 VECTORES Y MOVIMIENTOS

En muchas situaciones cotidianas, tenemos la oportunidad de observar objetos que se trasladan sin alterar ni su forma ni sus medidas.

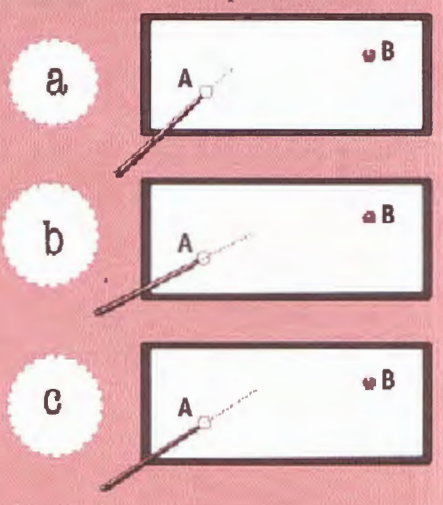
En Matemática, llamamos *movimientos* a las transformaciones geométricas que no cambian ni el tamaño ni las proporciones de las figuras.

Los *vectores* constituyen una herramienta sumamente útil para describir matemáticamente algunas de estas transformaciones.

El juego de billar consiste en impulsar, mediante un golpe con un taco de madera, una pesada bola, que debe golpear sucesivamente otras dos que se encuentran en la mesa. Esta mesa es rectangular, está forrada con paño y enmarcada por cuatro bandas de goma, también forradas.

Si el taco la golpea sin "efecto", la bola se desplaza en línea recta, en la dirección en la que fue impulsada. Si rebota contra una de las bandas, se desplaza de tal manera que el ángulo agudo que forma su trayectoria con la banda antes del impacto es igual al que forma después de producirse el rebote.

● ¿En cuál de los siguientes casos la bola A chocará con la bola B después de rebotar en la banda, si el taco la impulsa sin efecto?



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

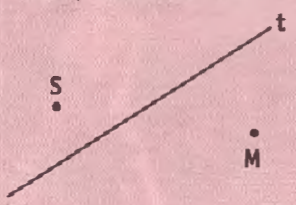
1 Utilizando la regla, el compás y el transportador, determinen los ángulos que barre la aguja minutera de un reloj en el lapso indicado en cada caso, y dibújenlos.

a) $\frac{1}{4}$ de hora. b) 20 minutos. c) 35 minutos. d) $\frac{4}{5}$ de hora.

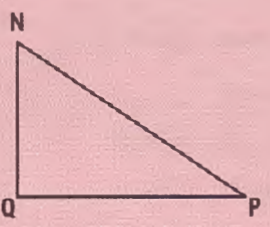
$\hat{\alpha}$= ..... $\hat{\beta}$= ..... $\hat{\delta}$= ..... $\hat{\gamma}$= .....

2 Realicen las construcciones pedidas utilizando la regla, la escuadra y el compás.

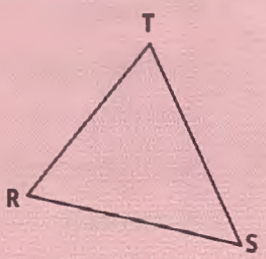
a) r // t; r contiene a M. l ⊥ t; l contiene a S.



b) Mediatrices de los lados del $\overset{\Delta}{NPQ}$.



c) Alturas del $\overset{\Delta}{RTS}$.



3 Construyan, con regla y compás, un triángulo cuyos lados tengan las medidas indicadas en cada caso, cuando sea posible.

a) 3 cm, 5 cm y 4 cm. b) 8 cm, 5 cm y 2 cm. c) 4 cm, 4 cm y 5 cm. d) 9 cm, 7 cm y 5 cm.

4 Consideren los puntos A = (–3; 4) y B = (5; 4).

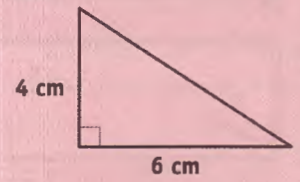
a) Ubíquenlos en un plano cartesiano.

b) Indiquen las coordenadas de un punto C de modo que el $\overset{\Delta}{ABC}$ sea:
I. Rectángulo. II. Isósceles. III. Obtusángulo.

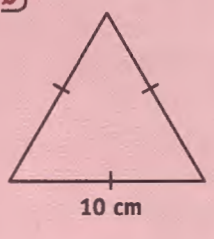
c) Indiquen las coordenadas de otros dos puntos, D y E, de modo que el cuadrilátero ABDE sea:
I. Paralelogramo. II. Rectángulo. III. Cuadrado.

5 Calculen el perímetro y el área de cada triángulo.

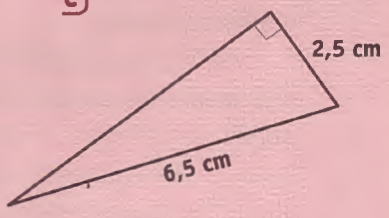
a)



b)



c)

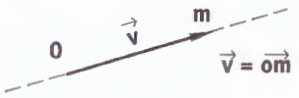


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Vectores

Para leer y recordar

- Llamamos *vector* $\vec{v}$ a un segmento orientado. Lo representamos gráficamente con una flecha, y las características que lo determinan son:
  - un *módulo* o longitud;
  - una *dirección*, dada por la recta que lo contiene;
  - un *sentido*: uno de los dos posibles que pueden tomarse sobre la recta que da la dirección.

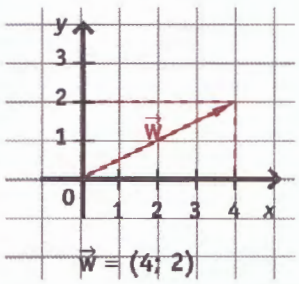


La velocidad y la fuerza, por ejemplo, son magnitudes físicas que deben representarse mediante vectores para ser estudiadas, por eso se consideran *magnitudes vectoriales*.

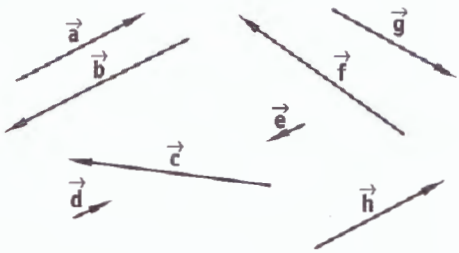
Consideramos que dos vectores tienen la misma dirección cuando están incluidos en la misma recta o en rectas paralelas.

- Cuando dos vectores tienen igual módulo, la misma dirección y el mismo sentido, decimos que son *equipolentes*.
- Dos vectores son *opuestos* si tienen igual módulo, la misma dirección y sentido contrario.

Para trabajar con vectores en el plano cartesiano, elegimos como "representante" de todos los vectores equipolentes a aquel que tiene origen en el punto (0; 0), y lo identificamos por las coordenadas de su extremo.



6 Entre los vectores representados, encuentren pares que cumplan las condiciones pedidas en cada caso.



a) Tienen la misma dirección.

b) Tienen igual dirección y sentido.

c) Tienen igual módulo.

d) Son equipolentes.

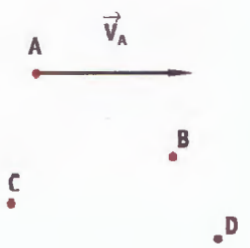
e) Tienen igual dirección y sentido opuesto.

f) Son opuestos.

7 En el siguiente esquema, los puntos A, B, C y D representan móviles que se desplazan, con distintas velocidades, todos en la misma dirección.

$\vec{V}_A$ representa la velocidad de A, que se desplaza a 40 km/h. Midan su longitud y representen, utilizando la misma escala, los vectores $\vec{V}_B$, $\vec{V}_C$ y $\vec{V}_D$, teniendo en cuenta la siguiente información:

- B se desplaza a 80 km/h en el mismo sentido que A;
- C se desplaza a 60 km/h en sentido opuesto al de B;
- D se desplaza con una velocidad cuyo módulo es igual al de la velocidad de B y cuyo sentido es igual al de la velocidad de C.



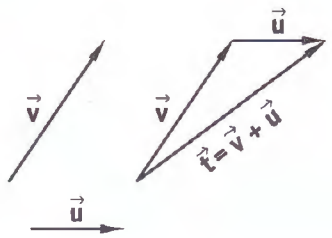
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Suma de vectores

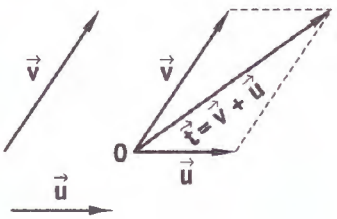
Para leer y recordar

La suma de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es otro vector $\vec{t}$, que puede obtenerse gráficamente utilizando alguno de los siguientes procedimientos.

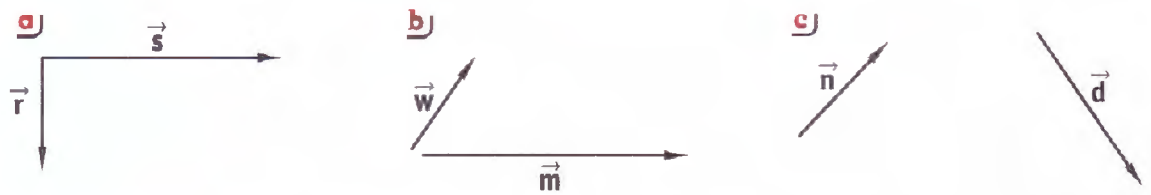
- ***Regla de la poligonal*: Se traslada $\vec{u}$ a continuación de $\vec{v}$, haciendo coincidir el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$. El *vector resultante* o *vector suma* $\vec{t}$ es el que tiene el origen de $\vec{v}$ y el extremo de $\vec{u}$.**



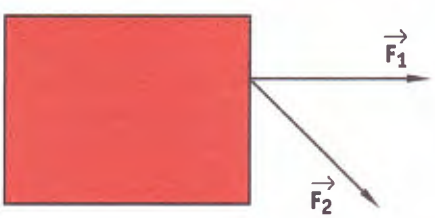
- ***Regla del paralelogramo*: Se hacen coincidir los orígenes de $\vec{v}$ y de $\vec{u}$. Luego se construye un paralelogramo que tiene como lados a los dos vectores. El origen del vector suma $\vec{t}$ coincide con el de ambos vectores y su extremo es el vértice opuesto del paralelogramo.**



8 Obtengan gráficamente la suma de cada par de vectores.



9 Dos personas tratan de mover una caja tirando de dos sogas. Las fuerzas que ejercen están representadas en la figura mediante vectores.
Encuentren gráficamente un vector $\vec{F}$ que represente una fuerza cuyo efecto sea equivalente al de las otras dos juntas.



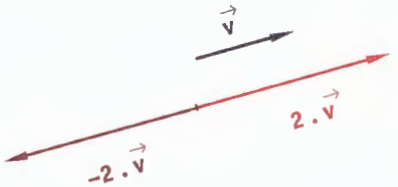
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Multiplicación de un vector por un número real

Para leer y recordar

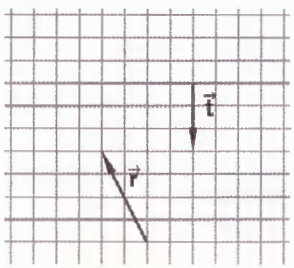
Si multiplicamos a un vector $\vec{v}$ por un número real m, distinto de cero, obtenemos otro vector con las siguientes características:

- tiene la misma dirección que $\vec{v}$;
- si $m > 0$, tiene el mismo sentido que $\vec{v}$; si $m < 0$, tiene el sentido contrario;
- su módulo es igual al módulo de $\vec{v}$ multiplicado por el valor absoluto de m.



10 Consideren los vectores $\vec{r}$ y $\vec{t}$ y resuelvan gráficamente las operaciones indicadas en cada caso.

a) $2 . \vec{r}$ b) $-3 . \vec{t}$ c) $2 . \vec{r} + \vec{t}$ d) $2 . \vec{t} + (-\vec{r})$



11 Una avioneta se dirige hacia el este, con una velocidad de 160 km/h. El piloto se ve sorprendido por una tormenta, con vientos que soplan desde el sur con una velocidad de 120 km/h. La velocidad resultante de la avioneta será la suma vectorial de ambas velocidades.

a) Hagan un esquema de la situación representando las velocidades mediante vectores (utilicen para los vectores la siguiente escala: 1 cm por cada 20 km/h).

b) Encuentren gráficamente el vector que representa la velocidad resultante.

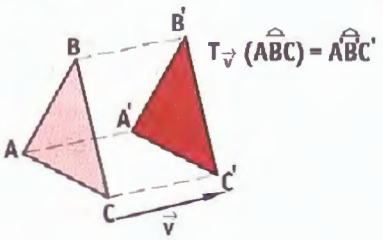
c) Apliquen el teorema de Pitágoras, y calculen el módulo de la velocidad resultante.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Traslaciones

Para leer y recordar

Llamamos *traslación de vector* $\vec{v}$, y lo escribimos $T_{\vec{v}}$, al movimiento que hace corresponder a cada punto P otro punto P', de modo que el punto P sea el origen de $\vec{v}$, y el punto P', su extremo.



12 Observen la figura y completen las expresiones, como en el ejemplo.

$T_{\overrightarrow{AB}}(\overset{\triangle}{HJI}) = \overset{\triangle}{IKD}$

$T_{\overrightarrow{EF}}(\overline{DE}) =$ .....

$T_{\overrightarrow{BI}}(C) =$ .....

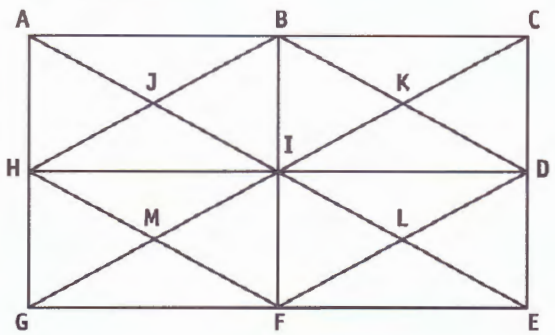
$T_{\overrightarrow{IH}}(\overset{\triangle}{DEL}) =$ .....

$T_{\overrightarrow{AG}}($ ..... $) = F$

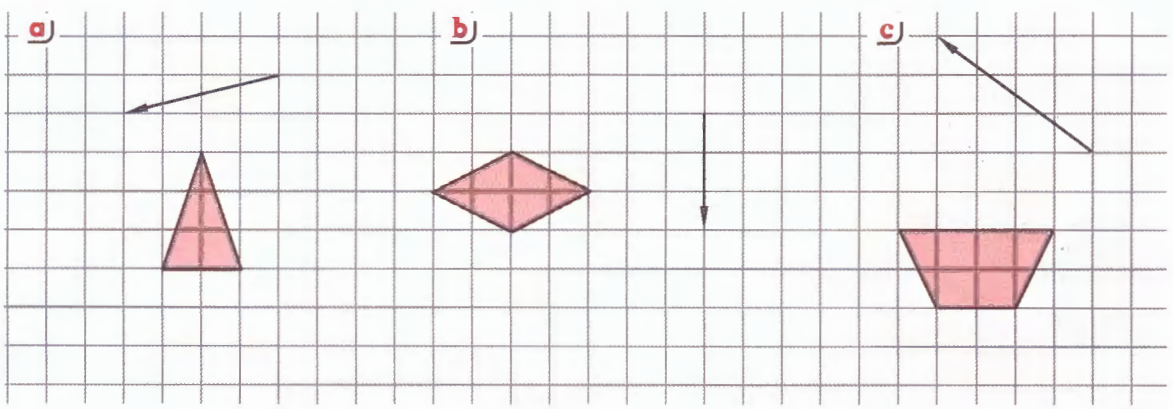
$T_{\overrightarrow{GI}}($ ..... $) = \overline{BK}$

$T_{\overrightarrow{GF}}($ ..... $) = \overset{\square}{IKDL}$

$T_{\overrightarrow{DE}}($ ..... $) = \overset{\square}{HIFG}$



13 Apliquen a cada figura una traslación según el vector indicado.



14 Dibujen un rectángulo ABCD cuyos lados midan 4 cm y 3 cm, y aplíquenle las siguientes traslaciones.

a) $T_{\overrightarrow{AB}}$ b) $T_{\overrightarrow{BC}}$ c) $T_{\overrightarrow{CA}}$

15 Indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

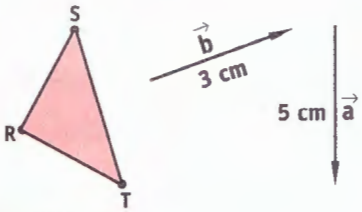
a) Algunas traslaciones alteran la forma de la figura trasladada.

b) Si a una figura se le aplica la traslación $T_{\overrightarrow{AB}}$ y, a la figura obtenida, se le aplica la traslación $T_{\overrightarrow{BA}}$, se obtiene la figura original.

c) Si se aplica una traslación a un triángulo rectángulo, el triángulo que se obtiene es acutángulo.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Composición de traslaciones



16 Observen la figura.

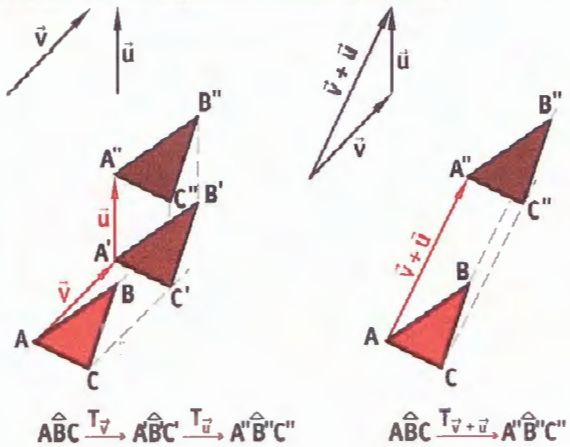
a) Dibujen el $R'\hat{S}'T' = T_{\vec{b}}(R\hat{S}T)$.

b) Dibujen el $R''\hat{S}''T'' = T_{\vec{a}}(R'\hat{S}'T')$.

c) Dibujen el $\vec{w}$, tal que la traslación $T_{\vec{w}}$ sea equivalente a las dos anteriores.

d) ¿Qué relación hay entre $\vec{b}$, $\vec{a}$ y $\vec{w}$?

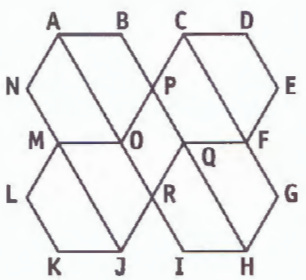
Para leer y recordar



- Realizar la *composición* de dos transformaciones geométricas significa encontrar otra transformación geométrica que sea equivalente a la aplicación sucesiva de las dos originales.
- La composición de dos traslaciones es otra traslación, cuyo vector es la suma de los vectores de cada una de las traslaciones.

$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$ se lee: traslación de vector v compuesta con traslación de vector u.

17 Observen la figura y completen las expresiones.



$T_{\vec{PQ}} \circ T_{\vec{BP}} = T_{\vec{BQ}}$

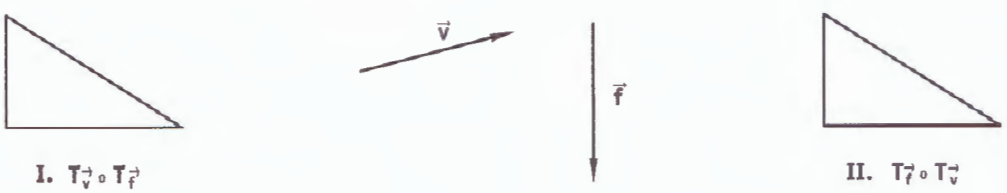
T..... $\circ T_{\vec{PH}} = T_{\vec{PI}}$

$T_{\vec{OM}} \circ T_{\vec{RO}} =$ .....

$T_{\vec{JM}} \circ T_{\vec{RJ}} =$ .....

18 Los siguientes triángulos son congruentes.

a) Apliquen en las figuras las composiciones de traslaciones indicadas.



I. $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{f}}$

II. $T_{\vec{f}} \circ T_{\vec{v}}$

b) Enuncien alguna conclusión.

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

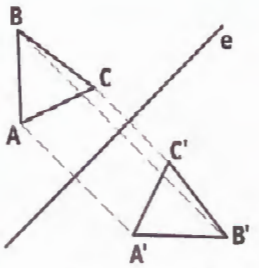
Simetría respecto de un eje

Para leer y recordar

Se llama *simetría axial* o *simetría respecta del eje e*, y lo escribimos S_e, al movimiento que hace corresponder a cada punto P otro punto P', S_e (P) = P', de modo que el eje de simetría *e* sea mediatriz del segmento PP'.

Decimos que P' es el simétrico de P respecto del *eje e*, o que los puntos P y P' son *correspondientes* u *homólogos*.

Una recta es *eje de simetría* de una figura si, al aplicar a la figura la simetría respecto de dicha recta, obtenemos otra figura que queda superpuesta a la original.



$S_e(A) = A'$ $S_e(B) = B'$ $S_e(C) = C'$

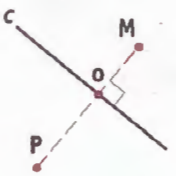
$S_e(\overset{\frown}{ABC}) = \overset{\frown}{A'B'C'}$

19 En cada caso, indiquen si el punto M es simétrico del punto P respecto de la recta *c*.

a)

b)

c)

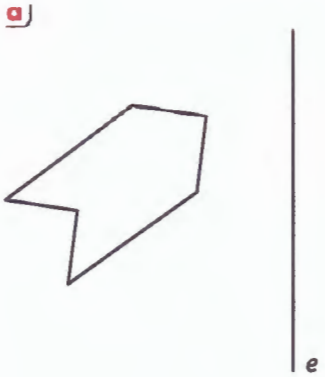


....

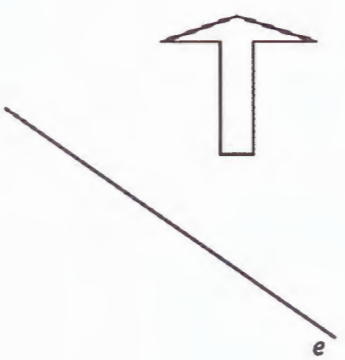
....

20 Construyan en cada caso la figura simétrica respecto del eje *e* dado.

a)



b)

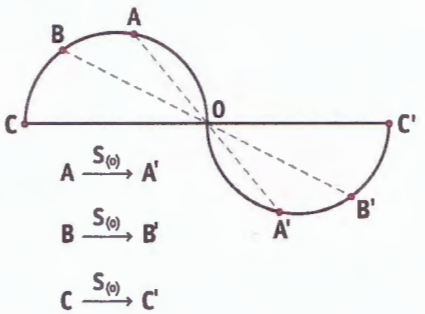


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

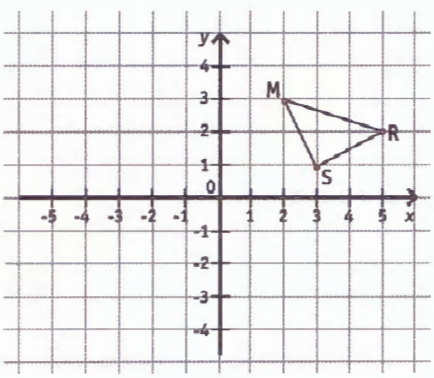
Simetría respecto de un punto

Para leer y recordar

- Se llama *simetría central* o *simetría respecto del centro* O, y la escribimos $S_{(O)}$, al movimiento que hace corresponder a cada punto P otro punto P', de modo tal que O es el punto medio del segmento PP'.
- Decimos que un punto es *centro de simetría* de una figura cuando, al aplicar a la figura la simetría respecto de ese punto, obtenemos otra superpuesta a la original.



21 Consideren el triángulo MRS de la figura, y la simetría $S_{(O)}$, donde O es el origen de coordenadas.



a) Dibujen el $\overset{\Delta}{ABC} = S_{(O)}(\overset{\Delta}{MRS})$.

b) Completen las siguientes expresiones.

$S_{(O)}$ (M) = ... A = (..... ; .....) $S_{(O)}$ ($\overline{MR}$) = ...

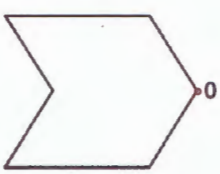
$S_{(O)}$ (R) = ... B = (..... ; .....) $S_{(O)}$ ($\overline{RS}$) = ...

$S_{(O)}$ (S) = ... C = (..... ; .....) $S_{(O)}$ (.....) = $\overline{AC}$

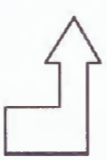
22 Construyan en cada caso la figura simétrica respecto del punto indicado.

a)

b)



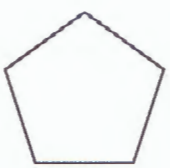
c)



O

d)

O

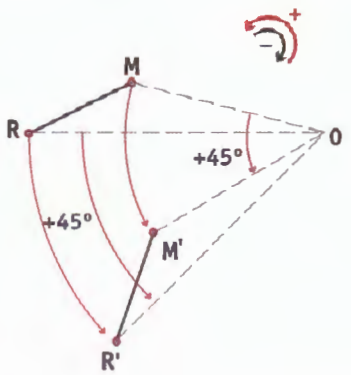


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Rotaciones

Para leer y recordar

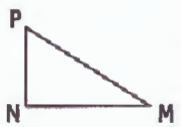
- Llamamos *giro* o *rotación* de centro O *y ángulo* α, y lo escribimos $R_{(O;\hat{\alpha})}$, al movimiento que transforma a cada punto P en otro punto P', de modo tal que $P\hat{O}P' = \hat{\alpha}$ (en este caso, al referirnos al ángulo, tenemos en cuenta la medida de su amplitud y un sentido, al que consideramos positivo si es opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, y negativo en caso contrario).
- Decimos que una figura tiene un *centro de giro* O *y ángulo* α si al aplicar a la figura la rotación de ese centro y ese ángulo, obtenemos otra figura que queda superpuesta a la original.



23 Apliquen a cada figura la rotación indicada.

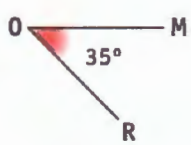
a) $R_{(C;\ 180°)}$

b) $R_{(M;\ -60°)}$

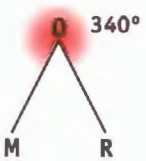


24 Indiquen, en cada caso, dos rotaciones distintas que hagan corresponder $\overline{OM}$ con $\overline{OR}$.

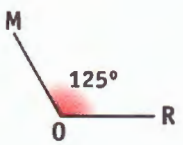
a)



b)



c)



d)

....

25 Observen la figura y completen las siguientes expresiones.

$R_{(P;\ 45°)}$ (F) = ... $R_{(P;\ -180°)}$ (D) = ...

$R_{(P;\ -135°)}$ (H) = ... $R_{(P;\ 90°)}$ (E) = ...

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Arte y movimientos

La proporción y la simetría han estado presentes en toda la historia del arte, y su incidencia fue variando según las sociedades y las épocas.
El artista holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972) hizo en su obra un gran despliegue de diversos conceptos geométricos, en los que basó casi matemáticamente muchos de sus trabajos. La división regular del plano con motivos congruentes asociados a objetos naturales fue una de sus pasiones.

26 Observen detenidamente las imágenes y mencionen las características comunes y las diferencias que encuentren entre ellas (con relación al tratamiento geométrico de las figuras).

.....

.....

.....

Escher dedicó gran parte de su carrera a diseñar grabados con *mosaicos* o *recubrimientos* del plano. Estos diseños tienen la particularidad de utilizar repetidamente una misma forma para cubrir "exactamente" una superficie plana sin que queden huecos ni superposiciones.
El recubrimiento considerado más sencillo es el que se obtiene mediante la traslación de una pieza en dos direcciones. En otros casos, se utilizan rotaciones de 180°, además de las traslaciones.

27 Indiquen a cuál de los tipos mencionados corresponde cada una de las obras reproducidas en esta página.

.....

.....

.....

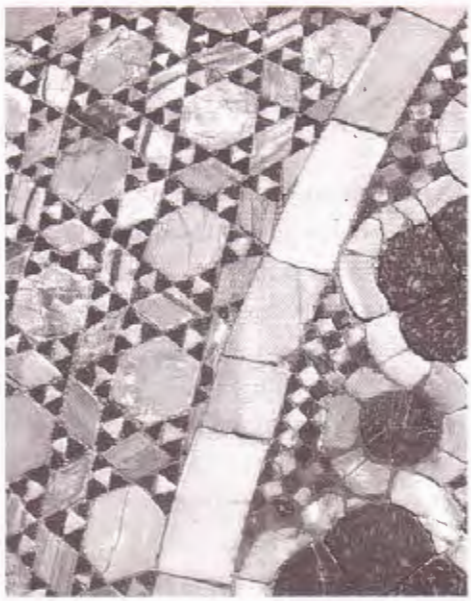
Escher, Camello (*fragmento*).

Escher, Caballito de mar (*fragmento*).

Escher, Pájaro (*fragmento*).

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Mosaicos y recubrimientos



Cuando se seleccionan piedras o se diseñan azulejos para cubrir pisos y paredes, se eligen formas y colores cuyas combinaciones resulten estéticamente agradables y sean geométricamente posibles de plasmar. Podemos apreciar esta combinación de la geometría con la inspiración artística en los mosaicos de las casas romanas y en los templos musulmanes, pero también en los pisos y paredes de las casas y los edificios que habitamos.

Un recubrimiento se considera *regular* si está hecho únicamente con polígonos regulares, todos iguales, y además si en cada vértice se junta el mismo número de polígonos.

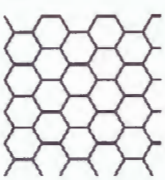
Un recubrimiento se considera *semirregular* si incluye únicamente polígonos regulares, y si los polígonos que tienen el mismo número de lados tienen el mismo tamaño.

28 Entre las siguientes figuras, se pueden reconocer tres recubrimientos regulares y siete semirregulares.

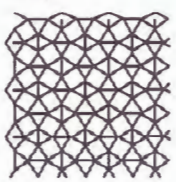
a) Identifiquen cuáles son de cada tipo.

b) Indiquen el polígono o los polígonos utilizados en cada uno.

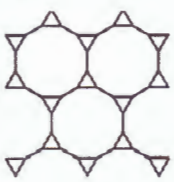
I.



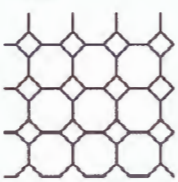
III.



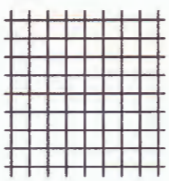
V.



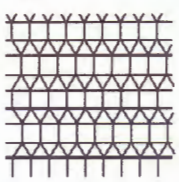
VII.



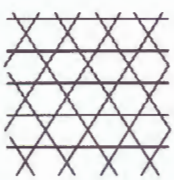
IX.



XI.

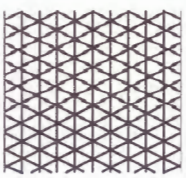


II.

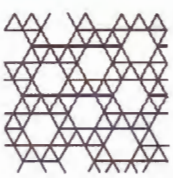


IV.

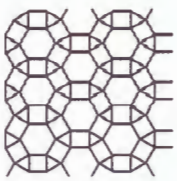
VI.



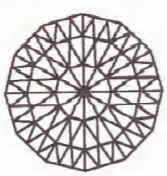
VIII.



X.

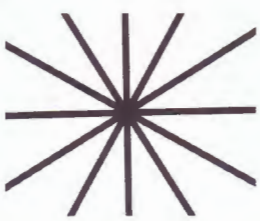


XII.

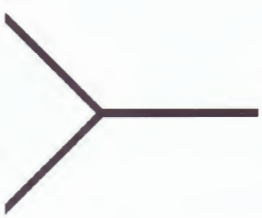


c) Identifiquen a cuál recubrimiento pertenece cada uno de los siguientes sectores amplificados.

A

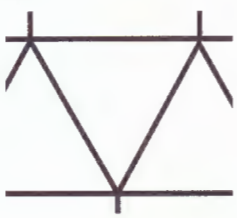


B



C

D



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

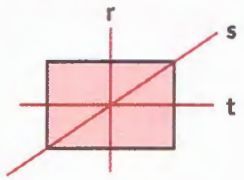
MÁS ACTIVIDADES

29 Consideren las figuras siguientes.

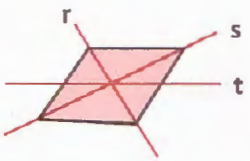
a) Indiquen, en caso de ser posible, cuáles de las rectas de color trazadas son ejes de simetría de las figuras.

b) Indiquen cuáles de las figuras tienen centro de simetría.

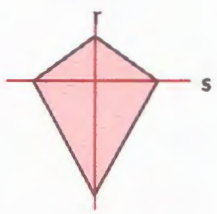
I.



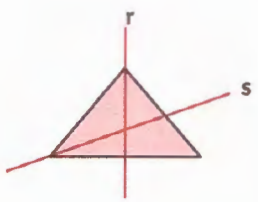
II.



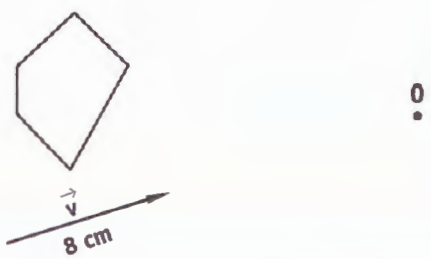
III.



IV.



30 Apliquen a la siguiente figura la composición de transformaciones $R_{(O;\,-45°)} \circ T_{\vec{v}}$.

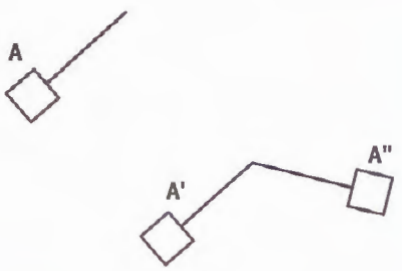


31 Mediante la composición de dos movimientos, M_1 o M_2, la figura A se transformó en la figura A".

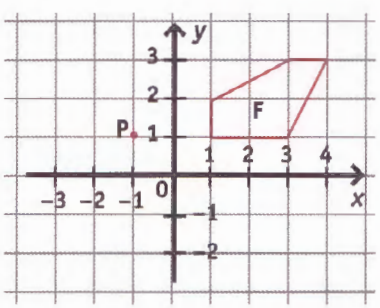
a) ¿Cuáles fueron esos movimientos? ¿En qué orden se aplicaron?

b) ¿Se habría obtenido la misma figura si se hubieran aplicado en el orden inverso?

c) ¿Existe otro par de movimientos cuya composición transforme A en A"? Si la respuesta es negativa, expliquen por qué. En caso contrario, propongan un ejemplo.



32 Consideren la figura F, la simetría central $S_{(O)}$, y la simetría axial S_x.



a) Obtengan gráficamente $S_x \circ S_{(P)}$ (F) e indiquen las coordenadas de sus vértices.

b) Obtengan gráficamente $S_{(P)} \circ S_x$ (F) e indiquen las coordenadas de sus vértices.

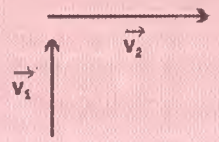
c) Analicen los resultados que obtuvieron y enuncien alguna conclusión.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

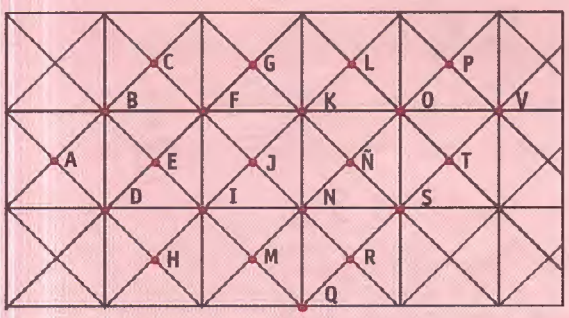
1 Resuelvan gráficamente las operaciones indicadas.

a) $2 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_2$



b) $-\vec{v}_3 + \vec{v}_4$

2 Observen la figura y completen las siguientes expresiones.



a) $T_{\overrightarrow{BK}}(\overset{\Delta}{BFC}) =$ ____

b) ____ $(\overline{ABFD}) = \overline{IHDF}$

c) ____ $(\overset{\Delta}{BFE}) = \overset{\Delta}{EDI}$

d) S____ $(\overline{POTV}) = \overline{MNRQ}$

e) $R_{(}$____$_{)}$ $(\overline{MNFE}) = \overline{MQSÑ}$

f) $S_{HL(}$____$_{)} = \overset{\Delta}{NQR}$

g) S____ $(\overline{ACJH}) = \overline{JLTR}$

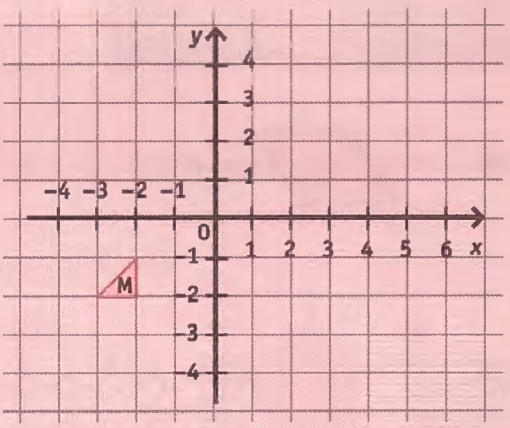
3 Obtengan, a partir de la figura M, las figuras M_1, M_2, M_3 y M_4 según las transformaciones que se proponen. Indiquen las coordenadas de los vértices de M_4.

a) $T_{\overrightarrow{OM}}(M) = M_1$, donde O = (0; 0) y M = (5; 1).

b) $R_{(P, -135°)}(M_1) = M_2$, donde P = (1; 0).

c) $S_y(M_2) = M_3$.

d) $S_r(M_3) = M_4$, donde R = (−1; 2).



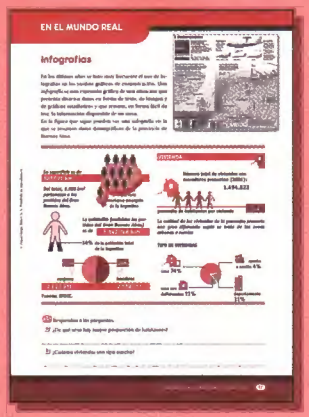
4 Marquen en cada imagen todos los ejes y los centros de simetría que encuentren.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

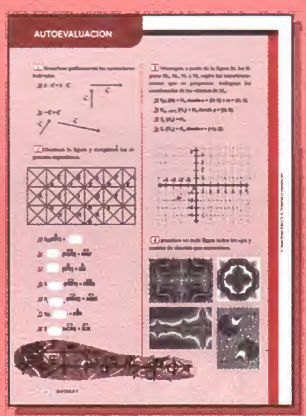
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

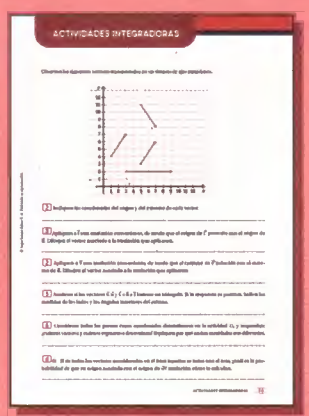


En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 5 y 7, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.

Para leer y recordar

Si n es un número natural:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$ $\qquad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).

Para observar

Recordemos con algunos ejemplos cómo operamos con fracciones.

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

12

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE